$2^η$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

11 .

i) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι το τετράγωνο μιας πλευράς που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία , ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο μιας εξ αυτών επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν

i) Να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο (= , < , >) στις παρακάτω προτάσεις

α) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $α^2 < β^2 + γ^2$ αν και μόνο αν $\widehat{Α}$ ….90^o

β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $α^2 > β^2 + γ^2$ αν και μόνο αν $\widehat{Α}$ ….90^o

γ) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $α^2 = β^2 + γ^2$ αν και μόνο αν $\widehat{Α}$ ….90^o

iii) Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται : ΑΒ = 3 , ΒΓ = 5 και ΑΓ = 7

Η προβολή της ΑΒ πάνω στην ΑΓ είναι

Α. 7, Β. 8, Γ. $\frac{65}{14}$, Δ. $\sqrt{3}-1$, Ε. $\frac{33}{14}$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

iv) Στον παρακάτω πίνακα στην στήλη Α δίνεται το είδος της γωνίας ενός τριγώνου και στην στήλη Β τριάδα αριθμών που μπορεί να είναι μήκη πλευρών τριγώνου .

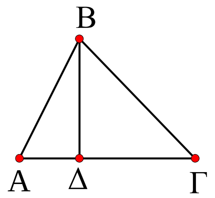
Να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\widehat{Α} > 90^o$	1. α = 2κ , β = 4κ , γ = 3κ όπου κ θετικός ακέραιος
β. $\widehat{Α} < 90^o$	2. α = 7 , β = 4 , γ = 5
γ. $\widehat{Α} = 90^o$	3 . α = 4 , β = 7 , γ = 9
	4. α = 6 , β = 8 , γ = 15

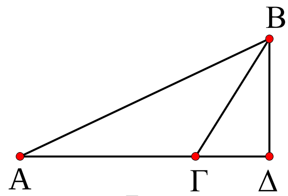
Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω ότι $\widehat{Α} < 90^o$ και ΒΔ ύψος του τριγώνου τότε , αν όλες οι γωνίες είναι οξείες έχουμε το σχήμα (1) και αν $\widehat{Γ} > 90^o$ έχουμε το σχήμα (2)



Σχ . 1



Σχ . 2

Όπου και στα δύο σχήματα το ΑΔ είναι η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ .

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε ότι

$ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΓΔ^2$ **(α)**

Στο σχήμα **(1)** είναι ΓΔ = ΑΓ – ΑΔ ενώ στο σχήμα **(2)** είναι ΓΔ = ΑΔ – ΑΓ

Και στις δύο περιπτώσεις από την **(α)** βρίσκουμε ότι

$ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΑΔ^2 - 2ΑΔΑΓ + ΑΓ^2$ **(β)**

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ προκύπτει

$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2$ **(γ)**

Η **(β)** λόγω της **(γ)** γίνεται

$ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΑΒ^2 - ΒΔ^2 - 2ΑΔΑΓ + ΑΓ^2 =$

$= ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓΑΔ$

Οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο

ii)

α) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $α^2 < β^2 + γ^2$ αν και μόνο αν $\widehat{Α} < 90^o$

β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $α^2 > β^2 + γ^2$ αν και μόνο αν $\widehat{Α} > 90^o$

γ) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $α^2 = β^2 + γ^2$ αν και μόνο αν $\widehat{Α} = 90^o$

iii)

Επειδή $ΒΓ^2 = 25$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 9 + 49 = 58$ δηλαδή

$ΒΓ^2 < ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ άρα $\widehat{Α} < 90^o$ τότε όπως αποδείξαμε στο (α) έχουμε

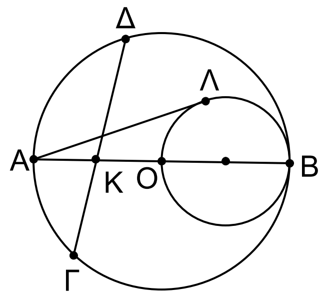
$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ\cdot ΑΔ \Leftrightarrow$

$25 = 9 + 49 - 14ΑΔ \quad \Leftrightarrow \quad ΑΔ = \frac{33}{14}$

iv)

$α \rightarrow 2, \quad β \rightarrow 3, \quad γ \rightarrow 1$

12.



Στο διπλανό σχήμα δίνονται κύκλος κέντρου Ο με διάμετρο ΑΒ = 8 , Κ το μέσο της ΑΟ και ΓΔ η χορδή που διέρχεται από το Κ με ΚΓ = 3

i) Να υπολογίσετε το τμήμα ΚΔ

ii) Να υπολογίσετε το εφαπτόμενο τμήμα ΑΛ του κύκλου που γράφεται με διάμετρο την ΟΒ

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ των δύο κύκλων

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού ΑΒ = 8 είναι ΑΟ = ΟΒ = 4 και ΚΑ = 2 , ΚΒ = 6

γνωρίζουμε ότι

$K\Gamma \cdot K\Delta = KA \cdot KB \Leftrightarrow 3K\Delta = 12 \Leftrightarrow K\Delta = 4$

ii)

$A\Lambda^2 = AO \cdot AB \quad \Leftrightarrow A\Lambda^2 = 32 \Leftrightarrow A\Lambda = 4\sqrt{2}$

iii) Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου μείον το εμβαδόν του μικρού κύκλου επομένως

$E_{\text{ζητούμενο}} = \pi\, AO^2 - \pi \left(\frac{OB}{2}\right)^2 = 16\pi - 4\pi = 12\pi$ τετραγωνικές μονάδες

13.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της ΑΒ . Προεκτείνουμε την ΓΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2}$ και φέρνουμε το ΑΔ

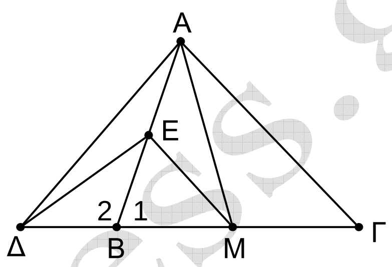
i) Να αποδείξετε ότι $(ΔΕΒ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ)$

ii) Να βρείτε τους λόγους $\frac{(ΔΕΒ)}{(ΑΒΓ)}$ και $\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΓ)}$

iii) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ , να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ) = (ΑΜΕ)

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή ΔΕ διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΒ

είναι $(ΔΕΒ) = (ΑΔΕ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ)$

ii)

Τα τρίγωνα ΔΕΒ και ΑΒΓ έχουν

$\hat{Β}_1 + \hat{Β}_2 = 180^o$ άρα

$$\frac{(ΔΕΒ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΒΔ \cdot ΒΕ}{ΒΑ \cdot ΒΓ} = \frac{\frac{ΒΓ}{2} \cdot \frac{ΒΑ}{2}}{ΒΑ \cdot ΒΓ} = \frac{1}{4}$$

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν την γωνία $\hat{Γ}$ κοινή άρα

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{ΑΓ \cdot ΓΒ}{ΓΑ \cdot ΓΔ} = \frac{ΓΒ}{\frac{3}{2}ΓΒ} = \frac{2}{3}$$

iii)

Στο τρίγωνο ΕΔΜ η ΒΕ είναι διάμεσος άρα (ΔΕΒ) = (ΒΕΜ) **(1)** επίσης στο τρίγωνο ΑΜΒ η ΜΕ είναι διάμεσος άρα (ΒΕΜ) = (ΑΕΜ) **(2)**

από τις **(1)** και **(2)** έχουμε ότι (ΒΔΕ) = (ΑΜΕ)

14.

Τρείς κύκλοι (O_1 , R_1) , (O_2 , R_2) και (O_3, R_3) εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά στα σημεία Α , Β και Γ . Αν είναι $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$ και $R_3 = 2-\sqrt{2}$

i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο

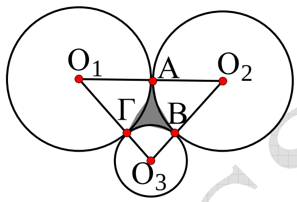
ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $O_1O_2O_3$

iii) Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ (γκρίζο τρίγωνο)

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ

Προτεινόμενη λύση

i)



Επειδή οι κύκλοι εφάπτονται ανά δύο εξωτερικά θα είναι

$O_1O_2 = R_1 + R_2 = 2\sqrt{2}$,

$O_1O_3 = R_1 + R_3 = 2$, $O_2O_3 = R_2 + R_3 = 2$

$(O_1O_2)^2 = 8$ και $(O_1O_3)^2 + (O_2O_3)^2 = 8$ άρα

$(O_1O_2)^2 = (O_1O_3)^2 + (O_2O_3)^2$ επομένως το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα O_1O_2 .

ii)

Αφού $O_1O_3 = 2 = O_2O_3$ θα είναι

$(O_1O_2O_3) = \frac{1}{2}(O_1O_3)(O_2O_3) = 2$ τετραγωνικές μονάδες

iii)

Αφού $O_1O_3 = 2 = O_2O_3$ το ορθογώνιο τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι και ισοσκελές άρα

$\hat{O}_1 = 45^o = \hat{O}_2$

Τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΓ}$ και $\overset{\frown}{ΑΒ}$ είναι φανερά ίσα και το μήκος κάθε ενός είναι

$$\ell = \frac{\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 45^0}{180^0} = \frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{4}$$

Το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ αφού $\hat{O}_3 = 90^o$ έχει μήκος

$$\ell' = \frac{\pi\cdot(2-\sqrt{2})\cdot 90^0}{180^0} = \frac{\pi\cdot(2-\sqrt{2})}{2}$$ επομένως

Η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με

$$P = 2\cdot\frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\cdot(2-\sqrt{2})}{2} = \pi$$ μονάδες μήκους

iii)

Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδό του τριγώνου $O_1O_2O_3$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν των τριών τομέων που βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου .

Όμως

$(O_1O_2O_3) = \frac{1}{2}(O_1O_3)(O_2O_3) = 2$, $E_{(O_1\overset{\frown}{A\Gamma})} = E_{(O_2\overset{\frown}{AB})} = \frac{\pi\cdot(\sqrt{2})^2\cdot 45^0}{360^0} = \frac{\pi}{4}$

και $E_{(O_3\overset{\frown}{B\Gamma})} = \frac{\pi\cdot(2-\sqrt{2})^2\cdot 90^o}{360^0} = \frac{\pi(6-4\sqrt{2})}{4}$ άρα

$E_{\text{ζητούμενο}} = 2-2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi(6-4\sqrt{2})}{4} = (2-2\pi+\pi\sqrt{2})$ τετραγωνικές μονάδες

15.

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο . Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ η οποία προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Δ . Αν $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$ δείξτε ότι

i) ΑΜ= $\dfrac{\alpha\sqrt{5}}{2}$ **ii)** ΜΔ = $\dfrac{\alpha\sqrt{5}}{10}$ **iii)** $\dfrac{(AB\Gamma)}{(M\Delta\Gamma)}=10$

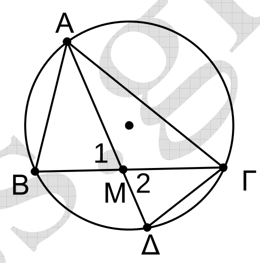
Προτεινόμενη λύση

i)

Γνωρίζουμε ότι $\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \dfrac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4}$

και λόγω της υπόθεσης

$\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\cdot 3\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \dfrac{5\alpha^2}{4}$ άρα $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{5}}{2}$



ii)

Είναι ΜΑ ·ΜΔ = ΜΒ·ΜΓ $\Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot M\Delta = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{5}}{10}$$

iii)

Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΔΓ έχουν $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ σαν κατακορυφήν άρα

$$\frac{(ABM)}{(M\Delta\Gamma)} = \frac{MB\cdot MA}{M\Delta\cdot M\Gamma} = \frac{\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{\alpha}{2}} = 5 \quad \textbf{(1)}$$ όμως

στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος άρα

$(ABM) = (AM\Gamma) = \dfrac{1}{2}(AB\Gamma)$ τότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{(AB\Gamma)}{2(M\Delta\Gamma)} = 5 \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(M\Delta\Gamma)} = 10$$

16.

Α .

i) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή αυτής της κάθετης πλευράς στην υποτείνουσα

ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ ύψος και ΑΜ διάμεσο και $\hat{\Gamma} > 90^o$

Να αντιστοιχίσετε σε κάθε στοιχείο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα ένα στοιχείο της στήλης Β ώστε να προκύψει ισότητα

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $AB^2 - A\Gamma^2$	1. $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + 2B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$
β. AB^2	2. $AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$
γ. $AB^2 + A\Gamma^2$	3. $2B\Gamma \cdot M\Delta$
	4. $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$
	5. $2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$
	6. $B\Gamma^2$

Β.

i) Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι $\alpha = 5$, $\beta = 7$, $\gamma = 10$

η διάμεσος μ_γ είναι

α) $3\sqrt{2}$, β) $2\sqrt{3}$, γ) $2\sqrt{2}$, δ) $4\sqrt{3}$, ε) $4\sqrt{2}$

επιλέξτε την σωστή απάντηση

ii) Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μία διάμετρος του ΒΓ . Από σημείο Α του κύκλου φέρνουμε την ΑΔ κάθετη στην ΒΓ . Αν $B\Gamma = 20$, $B\Delta = \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ δείξτε ότι $AB = 4\sqrt{5}$

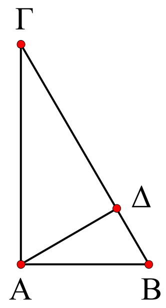
iii) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma A = \Gamma B = 4$ και $\hat{\Gamma} = 120^o$,

δείξτε ότι $AB = 4\sqrt{3}$

Προτεινόμενη λύση

Α.

i)



Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος στη υποτείνουσα ΒΓ .

Θα αποδείξουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουν την γωνία $\hat{B}$ κοινή άρα είναι όμοια οπότε

$$\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$$

ii)

$\alpha \to 3$, $\beta \to 1$, $\gamma \to 5$

Β .

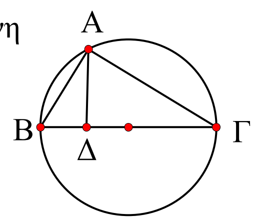
i)

$$\mu_\gamma^2 = \frac{2\beta^2 + 2\alpha^2 - \gamma^2}{4} =$$

$$= \frac{98 + 50 - 100}{4} = 12 \text{ άρα } \mu_\gamma = 2\sqrt{3} \text{ οπότε}$$

σωστή απάντηση είναι η β

ii)



Στο διπλανό σχήμα είναι $B\hat{A}\Gamma = 90^o$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ

$$B\Delta = \frac{1}{4}\Delta\Gamma \Leftrightarrow B\Delta = \frac{1}{4}(B\Gamma - B\Delta) \Leftrightarrow$$

$$B\Delta = \frac{1}{4}(20 - B\Delta) \Leftrightarrow B\Delta = 4 \text{ οπότε}$$

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \quad \Leftrightarrow AB^2 = 80 \Leftrightarrow AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

iii)

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$$AB^2 = \Gamma A^2 + \Gamma B^2 - 2\Gamma A \Gamma B \sigma\upsilon\nu 120^o =$$

$$= 16 + 16 - 32\left(-\frac{1}{2}\right) = 48 \text{ άρα } AB = 4\sqrt{3}$$

17.

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τις διαδοχικές χορδές ΑΒ = $R\sqrt{2}$ και ΒΓ = $R\sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε συναρτήσει του R

i) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ($O\overset{\frown}{A\Gamma}$) που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $A\hat{O}\Gamma$

ii) Το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων τ_1 , τ_2 , τ_3 (γκρίζα περιοχή)

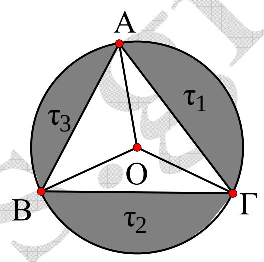
iii) Την χορδή ΑΓ

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή ΑΒ = $R\sqrt{2} = \lambda_4$ είναι $\overset{\frown}{AB} = 90^o$ και

ΒΓ = $R\sqrt{3} = \lambda_3$ άρα $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120^o$ οπότε θα είναι $\overset{\frown}{\Gamma A} = 150^o$



$$E_{O\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi R^2 \mu^o}{360^o} = \frac{\pi R^2 150^o}{360^o} = \frac{5\pi R^2}{12}$$

ii)

Το άθροισμα των εμβαδών των τριών κυκλικών τμημάτων προκύπτει αν από το εμβαδόν του κύκλου αφαιρέσουμε το εμβαδόν των τριών τριγώνων ΑΟΒ , ΒΟΓ και ΑΟΓ

$E_{\text{κύκλου}} = \pi R^2$

$$(AOB) = \frac{1}{2} R \cdot R \ \eta\mu 90^o = \frac{1}{2} R^2$$

$$(AO\Gamma) = \frac{1}{2} R \cdot R \ \eta\mu 150^o = \frac{1}{2} R^2 \ \frac{1}{2} = \frac{1}{4} R^2$$

$$(AOB) = \frac{1}{2} R \cdot R \ \eta\mu 120^o = \frac{1}{2} R^2 \ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \text{ επομένως}$$

$$E_{\text{ζητούμενο}} = \pi R^2 - \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{4} R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{(4\pi - 3 - \sqrt{3})R^2}{4}$$

iii)

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΟΓ έχουμε

$A\Gamma^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \sigma\upsilon\nu 150^o =$

$$= 2R^2 - 2R^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2R^2 + R^2\sqrt{3} \text{ άρα } A\Gamma = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

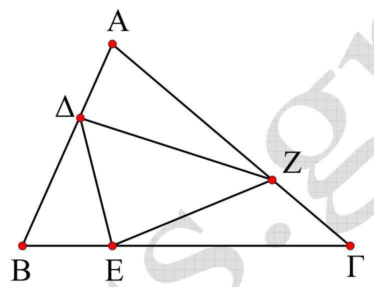
18.

Στις πλευρές ΑΒ , ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ έτσι ώστε $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$, $ΒΕ = λΒΓ$, $ΓΖ = λΓΑ$, όπου $0< λ <1$

Να δείξετε ότι

i) $\frac{(ΑΔΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1-λ}{3}$ **ii)** $\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{3λ^2-4λ+2}{3}$ **iii)** Αν $λ = \frac{2}{3}$ το τρίγωνο ΔΕΖ έχει το ελάχιστο εμβαδόν .

Προτεινόμενη λύση



i)

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΖ έχουν την γωνία $\widehat{Α}$ κοινή άρα

$$\frac{(ΑΔΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΖ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} \quad \textbf{(1)}$$

Αφού $ΓΖ = λΓΑ$ έχουμε ότι

$ΑΓ - ΑΖ = λΑΓ \Leftrightarrow ΑΖ = (1-λ)ΑΓ$ οπότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{(ΑΔΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{ΑΔ \cdot ΑΖ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{\frac{1}{3}ΑΒ \cdot (1-λ)ΑΓ}{ΑΒ \cdot ΑΓ} = \frac{1-λ}{3}$$

ii)

Από το **(i)** έχουμε ότι $(ΑΔΖ) = \frac{1-λ}{3}(ΑΒΓ)$

Ομοίως βρίσκουμε

$(ΒΔΕ) = \frac{2λ}{3}(ΑΒΓ)$ και $(ΓΔΕ) = (λ-λ^2)(ΑΒΓ)$ οπότε

$(ΔΕΖ) = (ΑΒΓ) - (ΑΔΖ) - (ΒΔΕ) - (ΓΔΕ) =$

$$= (ΑΒΓ) - \frac{1-λ}{3}(ΑΒΓ) - \frac{2λ}{3}(ΑΒΓ) - (λ-λ^2)(ΑΒΓ) = (ΑΒΓ)\ \frac{3λ^2-4λ+2}{3}$$

Επομένως

$$\frac{(ΔΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{3λ^2-4λ+2}{3}$$

iii)

Από το **(ii)** έχουμε ότι

$(ΔΕΖ) = \frac{3λ^2-4λ+2}{3}(ΑΒΓ)$ άρα το (ΔΕΖ) γίνεται ελάχιστο όταν

$3λ^2 - 4λ + 3$ = ελάχιστο .Όμως γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη τιμή του τριώνυμου προκύπτει για $λ = -\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{6} = \frac{2}{3}$

19.

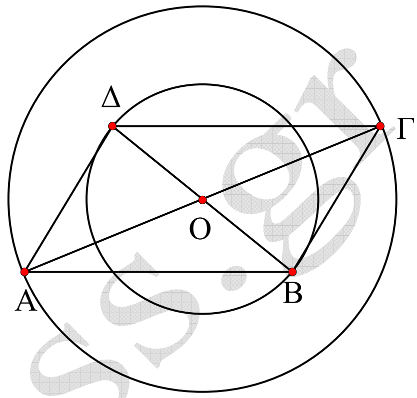
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ =α , ΒΓ= β , ΑΓ= γ όπου ΑΓ > ΒΔ .
Με διαμέτρους τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ γράφουμε κύκλους . Δείξτε ότι

i) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = A\Gamma^2 + B\Delta^2$.

ii) Αν Ε είναι το εμβαδό του σχηματιζόμενου κυκλικού δακτυλίου δείξτε ότι

$E = \frac{\pi}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)$.

Προτεινόμενη λύση



i)

Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουμε

$$\Delta A^2 + \Delta\Gamma^2 = 2\Delta O^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} =$$

$$= 2\left(\frac{\Delta B}{2}\right)^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} = \frac{\Delta B^2}{2} + \frac{A\Gamma^2}{2}$$

και ομοίως $BA^2 + B\Gamma^2 = \frac{\Delta B^2}{2} + \frac{A\Gamma^2}{2}$

προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε

$AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = \Delta B^2 + A\Gamma^2$

ii)

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου προκύπτει αν από το εμβαδόν του κύκλου (Ο , ΟΓ) αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κύκλου (Ο , ΟΒ)

Έχουμε

$$E_{(O,O\Gamma)} = \pi\, O\Gamma^2 = \pi\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi\gamma^2}{4}$$

$$E_{(O,OB)} = \pi\, OB^2$$

όμως η ΟΒ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΓΒ οπότε

$$OB^2 = \frac{2AB^2 + 2\Gamma B^2 - A\Gamma^2}{4} =$$

$$= \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$ συνεπώς

$$E_{(O,OB)} = \pi\frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$ μετά από αυτά

$$E_{\text{ζητούμενο}} = \frac{\pi\gamma^2}{4} - \pi\frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} = \frac{2\pi\gamma^2 - 2\pi\alpha^2 - 2\pi\beta^2}{4} = \frac{\pi}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)$$ τ. μ

20.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) με ΒΓ= α , ΑΓ= β και $AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}$. Δείξτε ότι

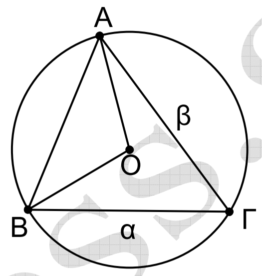
i) $\hat{\Gamma} = 60^o$

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει των α και β

iii) $R = \sqrt{\dfrac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{3}}$

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος με χορδή αυτή που περιέχεται μέσα στην γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ .

Προτεινόμενη λύση



i)

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot B\Gamma \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}\right)^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\,\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} \quad \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{1}{2} \;\; \text{άρα} \;\; \hat{\Gamma} = 60^o$$

ii)

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{4} \;\; \text{τετραγωνικές μονάδες}$$

iii)

$$(AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \beta\gamma}}{4R} \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{3}}$$

iv)

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E_{\zeta\eta\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\nu o} = E_{(O\overset{\frown}{AB})} - E_{\triangle OAB} =$$

$$= \frac{\pi R^2 \mu^o}{360^o} - \frac{1}{2}R^2 \eta\mu 120^o =$$

$$= \frac{\pi R^2 120^o}{360^o} - \frac{1}{2}R^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \;\; \text{τετραγωνικές μονάδες}$$